



**Akademie věd  
České republiky**

Teze disertace  
k získání vědeckého titulu „doktor věd“  
ve skupině věd „Technické vědy“

**METODY MODELOVÁNÍ DEGRADACE  
VE SPOLEHLIVOSTI TECHNICKÝCH SYSTÉMŮ**  
název disertace

Komise pro obhajoby doktorských disertací v oboru „Aplikovaná  
a teoretická mechanika“

Jméno uchazeče: David Vališ

Pracoviště uchazeče: Univerzita obrany v Brně

Místo a datum: Brno, 29.11.2019

# Úvod

Spolehlivost je nedílnou a stále více akcentovanou sub-vlastností kvality. V oblasti posuzování spolehlivosti, která je založena na studiu poruch a správné funkce, je v případě mechaniky technických systémů jednou z důležitých pasáží část, která se věnuje sledování technického stavu a jeho zhoršování - degradaci. Současné systémy vykazují relativně vyšší úroveň spolehlivosti, proto je často obtížné získat informaci o poruše. Z tohoto důvodu je studium degradace technických systémů perspektivní a často jedinou variantou pro zjišťování technického stavu.

Za manifestaci degradace můžeme považovat různé jevy, kterými se studovaný objekt projevuje. Degradaci a zhoršování technického stavu je možné sledovat i měřit přímo, někdy nazýváno také jako destruktivní diagnostika a/nebo nepřímo, tzv. diagnostika nedestruktivní. Z obou zmíněných přístupů získáváme poznatky a zpravidla soubory dat, které mají různou kvalitu, různou informační bohatost a obsahují různé časové identifikátory různé délky. Těmto informacím říkáme *diagnostický vektor*.

Z pohledu provozu a rovněž spolehlivosti je sice přímá diagnostika možná, není ale nejlepší variantou a také ne příliš často aplikovaným přístupem. Naproti tomu diagnostika nepřímá je velmi perspektivní a více rozšiřovaná. Existuje mnoho přístupů, které s provozními projevy strojů a procesů pracují, vyhodnocují je a přizpůsobují jim další, navazující, procesy. Za mnohé můžeme jmenovat provozní projevy technických zařízení jako emise spalinová, vibrace, akustická emise, tepelné záření, atd. Všechny tyto provozní projevy mají svoji hodnotu a nesou určitou míru informací, mimo jiné také o stavu systému. V případě dostatečného souboru dat – diagnostického vektoru – a při znalosti vhodných metod můžeme tento diagnostický vektor studovat za účelem sledování technického stavu systému, jeho změn, postupu degradace, zhoršování stavu až do okamžiku dosažení mezního stavu.

V předložené dizertační práci se pomocí navržených a perspektivních metod zabývám tímto aktuálním tématem – modelováním projevu, který bývá obvykle

nazýván degradace a zhoršování technického stavu systému. Jedná se především o pokročilé matematické metody:

- klasické statistiky pro stanovení ukazatelů spolehlivosti,
- modelování pomocí stochastických procesů se spojitým časem i diskrétním časem pro zjišťování průběhu degradace,
- neparametrické metody odhadu parametrů pro využití stochastické procesy pro lepší popis studovaných dat,
- soft metody typu fuzzy logika a neuronové sítě pro komplexnější popis procesu degradace s využitím více nezávislých proměnných.

Přínosem k modelování degradace v rámci studia mechaniky technických systémů jsou následující skutečnosti:

- Tyto navrhované a na praktických datech vyzkoušené metody doposud nebyly v uvedené podobě ani rozsahu aplikovány.
- Potenciál metod byl vylepšen tím, že v případech stochastických procesů byly pro popis degradace navrženy a využity přesnější procesy difuzního typu a procesy stavových modelů Kalmanova rekursoru, přičemž navíc odhady parametrů pro tyto procesy byly zcela nové s využitím „General Additive Models“, semiparametrických, resp. neparametrických přístupů např. jádrového vyhlazování. V případě časových řad byly zmodifikovány obvyklé okrajové předpoklady stran typu rozdělení pravděpodobnosti a pro navrhované nové typy dynamických lineárních modelů byly jako startovací hodnoty využity výsledky ze statických lineárních modelů.
- V případě soft metod fuzzy logiky a neuronových sítí můžeme rovněž konstatovat fakt, že rozsah a aplikace těchto metod doposud nebyla v praxi realizována. V případě fuzzy logiky se jedná o modifikaci tzv. „Fuzzy Inference System“, který je založen na určitých přístupech – zpravidla Mamdani. V naší práci jsme využili přístupy jak Mamdani, tak pro porovnání a v této konkrétní aplikaci nové Takagi-Sugeno a Sugeno.
- U neuronových sítí typu Multilayer perceptron a Radial Basis Function se jedná o využití jejich potenciálu pro modelování komplexních a vícerozměrných dat z provozu – zde lze rovněž prokázat, že aplikace těchto metod nebyla doposud na technické případy takového typu uskutečněna.

Zmíněné postupy studia degradace jsou založeny na publikovaných pracích autora, z nichž některé vybrané tvoří stěžejní část práce [92, 93, 94, 95, 96, 97, 98].

# Kapitola 1

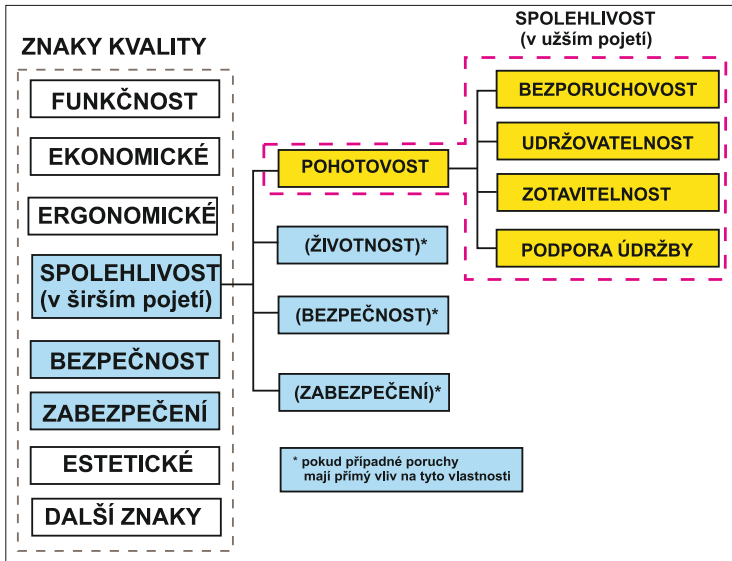
## Základní koncepce spolehlivosti a související pojmy z teorie pravděpodobnosti

V této kapitole bude stručně pojednáno o spolehlivosti a budou stručně shrnuty základy teorie pravděpodobnosti používané právě ve spolehlivosti. Pro popis matematické teorie existuje celá řada zdrojů s různou úrovní preciznosti a abstrakce. Pro naše potřeby aplikovaného výzkumu bylo čerpáno především z [3], [58] a [91]. Některá tvrzení jsou zde pro ilustraci dokázána, jiná uvedena pouze s odkazem. Celý text je však i s ohledem na určitou míru teoretického pojetí, hlavně ve svých matematických pasážích, orientován výrazně na praktické potřeby spolehlivosti, specificky na teorii a studium degradace.

### 1.1 Principy spolehlivosti v mechanice technických systémů

Spolehlivost je součástí kvality, přičemž pro její stručné vymezení zde vycházíme především z [40]. Pozice spolehlivosti a jejích komponent v rámci koncepce kvality je přehledně znázorněna na obrázku 1.1.





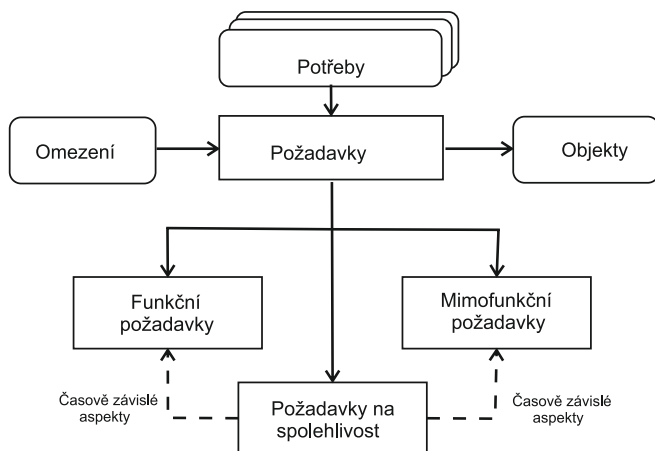
Obr. 1.1: Vztah mezi kvalitou, spolehlivostí a jejími znaky

Pro účely této práce pracujeme s pojetím, které se týká technických systémů, především ve vztahu k jejich mechanice provozu, údržby, hospodárnosti, efektivnosti a bezpečnosti.

Spolehlivost je schopnost objektu fungovat tak, jak je požadováno, a tehdy, když je to požadováno. Spolehlivost je tedy schopnost plnit požadavky a očekávání týkající se objektu důsledně po celou dobu. Spolehlivost vytváří hodnotu v tom, že si objekt uchovává charakteristiky výkonnosti, funguje, jak je požadováno, a uspokojuje potřeby a očekávání zákazníka. Management spolehlivosti je klíčovým prvkem širších systémů managementu organizace, zejména majetku, financí a kvality. Management spolehlivosti zahrnuje plánování a používání organizačních uspořádání, procesů a přidružených metod a technik s cílem dosáhnout výkonnosti organizace a cílů produktu.

Spolehlivost je pojem používaný k popisu časově závislých charakteristik souvisejících s funkčností objektu. Spolehlivost obsahuje charakteristiky, jako je pohotovost, bezporuchovost, udržovatelnost a podporovatelnost v daných podmínkách používání, a obsahuje požadavky na zajištěnost údržby. Spolehlivost popisuje rozsah, ve kterém můžeme něčemu důvěřovat, že se chová tak, jak se očekává. Spolehlivost se zlepšuje systematickým snižováním četnosti výpadků, poruch

produktu, pomalejší degradací, zmenšováním dob nepoužitelného stavu služby a dalších nežádoucích událostí, a minimalizací jejich důsledků. Toho se dosahuje zásahy, jako je zlepšení návrhu, odstranění kořenových příčin poruchy, zjednodušení složitých procesů, zmírnění následků anomálií, podporování odolnosti proti poruchovým stavům v návrhu a použitelnosti, prosazováním toho, aby se zabránilo poruchovým stavům a aby se předcházelo chybám, řízením údržbářských činností a vytvořením závazků s cílem vybudování důvěryhodnosti a integrity, aby byla zajištěna důvěra uživatele během životního cyklu. Časné zohlednění spolehlivosti během životního cyklu je klíčové, jelikož opravit návrh, který je příčinou nedostatečné spolehlivosti, bývá později často obtížnější, náročnější na čas a dražší. Základní rozčlenění vztahů a požadavků na spolehlivost technického objektu je na obrázku 1.2.



Obr. 1.2: Vztah spolehlivosti k potřebám a požadavkům na objekt

Požadavky na spolehlivost jsou určovány na základě potřeb zúčastněných stran a vycházejí z omezení, jako jsou především podmínky použití, zdroje a legislativa. Zahrnují funkční požadavky, které stanovují, co je požadováno, aby objekt vykonával, a mimofunkční požadavky, které specifikují dodatečné atributy – například prostředí. Příklady funkčních požadavků jsou kapacita a výstupní výkon a příklady mimofunkčních požadavků jsou bezpečnost, environmentální udržitelnost a účinnost. Požadavky na spolehlivost, které určují časově závislou schopnost dosáhnout spolehlivosti v těchto požadavcích, sestávají z charakteristik, jako je bezporuchovost, pohotovost, udržitelnost a podporovatelnost. Funkční a mimofunkční

požadavky a požadavky na spolehlivost spolu vzájemně souvisejí. Požadavek na spolehlivost může existovat pouze tehdy, existuje-li funkční nebo mimofunkční požadavek, který je třeba uspokojit. Mezi žádoucími požadavky mohou být konkurenční cíle, jako je bezpečnost nebo výroba a spolehlivost, a proto je nezbytná optimalizace nákladů a přínosů. Mohou se rovněž vyskytnout omezení týkající se nákladů, pohotovosti součástí objektu nebo zdrojů, nebo pevně stanovených časových os, které mohou způsobit kompromis mezi funkčností a spolehlivostí.

Vnímání schopnosti fungovat tak, jak je požadováno, a tehdy, když je to požadováno, se pro různé zúčastněné strany i posuzované objekty různí. Uživatelé, poskytovatelé, provozovatelé, správci a další, kdo interagují s objektem, mohou mít vzájemně se překrývající požadavky na spolehlivost, ale s různými aplikačními cíli a různými očekáváním co se týče používání. To může vést k odlišnému vnímání spolehlivosti, které by bylo nutné posoudit při stanovování požadavků. Spolehlivost zahrnuje objektivně měřitelné charakteristiky, jako jsou bezporuchovost, pohotovost a udržitelnost, a subjektivnější názory na důvěryhodnost vztahující se k funkcím požadovaným určitými zúčastněnými stranami. Základním faktorem při vymezování požadavků je schopnost měřit dosažení výkonnostních cílů. Spolehlivost zahrnuje jak schopnost splnit funkční a mimofunkční požadavky za normálních a očekávaných podmínek, tak schopnost se přizpůsobit neočekávaným změnám v požadavcích, předpokladech a okolnostech s cílem zotavit se z vnějších poruch systému.

## 1.2 Rámcem teorie pravděpodobnosti ve vztahu ke spolehlivosti

Pro potřeby této práce a z důvodu souvislosti se spolehlivostí dále uvádíme některé základní pojmy, které mají v oblasti aplikované matematiky své místo. Například jako *elementární nebo náhodný jev* – událost je ve spolehlivosti chápána porucha. Jiným příkladem může být *náhodný pokus* – ve spolehlivosti například provoz, atd. V tomto duchu předpokládáme, že čtenář bude na následující pasáže nahlížet a vnímat v kontextu spolehlivosti tak, jak definována v [40] a [41].

Není-li výsledek nějakého pokusu nebo děje jednoznačně určen podmínkami, za nichž se odehrává, můžeme různé možné výsledky považovat za *elementární jevy*. Označujeme je symbolem  $\omega$  s případnými indexy. Množinu všech elementárních jevů značíme jako  $\Omega$  a nazýváme ji *prostor elementárních jevů*. Nechť je na prostoru  $\Omega$  dána  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  jeho podmnožin. Tyto podmnožiny se nazývají *náhodné jevy*. Jednotlivým množinám patřícím do  $\mathcal{F}$  se pak připisuje pravděpodobnost pomocí pravděpodobnostní míry  $P$ . Trojice  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se nazývá

pravděpodobnostní prostor.

Nechť  $\mathcal{R}$  je reálná přímka a  $\mathcal{B}$  systém borelovských množin. Nechť  $X(\omega)$  je měřitelná funkce z  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  do  $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ . Pak se  $X(\omega)$  nazývá *náhodná veličina* a značí se stručně  $X$ . Náhodnou veličinu nazýváme *nezápornou*, pokud  $X \geq 0$ . Každé borelovské množině  $B \in \mathcal{B}$  lze přiřadit její vzor  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$  a pravděpodobnostní míru  $Q(B) = P\{X^{-1}(B)\}$ . Míra  $Q$  se nazývá *indukovaná míra* (je indukovaná funkcí  $X$ ) nebo také *zákon rozdělení náhodné veličiny  $X$* , stručně jen *rozdělení*.

V teorii spolehlivosti se často setkáváme s nezápornými náhodnými veličinami a jejich rozděleními pravděpodobnosti, které popisují například dobu do poruchy, proces degradace apod.

V teorii spolehlivosti se využívají ještě některé specifické funkce náhodné veličiny, které budou popsány dále. Náhodná veličina zde obvykle značí délku doby do poruchy, životnost součástky, průběh degradace zařízení apod. Při sestavení této kapitoly byly využity především publikace [4]–[9], [27], [28], [42], [61], [80]–[83], [108]–[110].

**Definice 1.1.** Nechť  $F(x)$  je distribuční funkce spojitě nezáporné náhodné veličiny  $X$  a nechť  $f(x)$  je její hustotou pravděpodobnosti. Potom **funkce intenzity poruchy**,  $\lambda(x)$ , pro náhodnou veličinu  $X$  je definována vztahem

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}. \quad (1.1)$$

**Poznámka 1.2.** Funkce přežití (jak byla uvedena v definici [91, s. 2]) je v teorii spolehlivosti rovněž nazýván jako **funkce pravděpodobnosti bezporuchového provozu** v časovém okamžiku  $x$  (označována  $R(x)$  nebo  $\bar{F}(x)$ ).

Výraz  $\lambda(x) dx$  vyjadřuje pravděpodobnost, že se zařízení v časovém okamžiku  $x$  porouchá v intervalu  $(x, x + dx)$ , za podmínky, že se do okamžiku  $x$  neporouchalo. Můžeme rovněž psát

$$\lambda(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{P\{\text{zařízení se porouchá v intervalu } (x, x + \Delta x) \mid \text{dosáhlo bez poruchy až do } x\}}{\Delta x} \right].$$

**Definice 1.3.** Funkce

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds \quad (1.2)$$

se nazývá **kumulativní funkce intenzity poruchy**.

Ze vztahu (1.1) vyplývá, že  $\lambda(t) = \frac{-\frac{d}{dt}\bar{F}(t)}{\bar{F}(t)}$ . Z toho plyne, že  $\Lambda(t) = -\log\bar{F}(t)$ . Odtud vidíme, že

$$\bar{F}(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right) = \exp[-\Lambda(t)]. \quad (1.3)$$

**Definice 1.4.** Pro diskrétní náhodnou veličinu s rozdělením  $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$  je **funkce intenzity poruchy** dána vztahem

$$\lambda(k) = \frac{p_k}{\sum_{j=k}^{\infty} p_j}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.4)$$

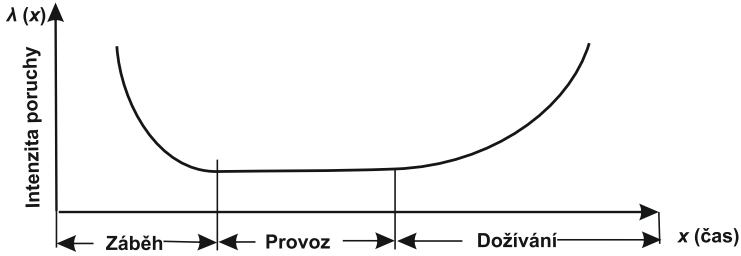
V tomto případě je  $\lambda(k) \leq 1$ .

Na základě průběhu a tvaru funkce  $\lambda(x)$  můžeme rozlišit tři základní typy vzniklých poruch.

- *Porucha v záběhu* – taková, která se projeví krátce po okamžiku  $x = 0$ . Funkce intenzity postupně klesá během počátečního období provozu. Příčinou tohoto typu poruch jsou skryté vady a systematické poruchy.
- *Porucha v provozu* – taková, která většinou nastává v období vlastního provozu, kdy zařízení pracuje s konstantní funkcí intenzity poruchy (navíc je hodnota funkce intenzity zpravidla nižší než v počáteční fázi provozu). Příčinou tohoto typu poruch je obvykle nepředvídatelný vliv provozu.
- *Porucha vlivem opotřebení/porucha dožitím* – taková, která je spojována s postupnou degradací, oslabováním materiálu, nebo kumulací rázů, únavy apod. Funkce intenzity je rostoucí.

Na obrázku 1.3 je uvedena funkce intenzity poruchy pro zařízení, které podléhá všem třem základním typům poruch. Průběh funkce intenzity poruchy bývá v takovém případě označován jako *vanová křivka*.

V teorii spolehlivosti je obvyklé používat funkci intenzity poruchy pro odvození rozdělení doby do výskytu poruchy. Kromě gama rozdělení se využívá také Weibullovo rozdělení, exponenciální rozdělení, inverzní Gaussovo rozdělení nebo Gumbelovo rozdělení extrémních hodnot aj. (viz např. [58, s. 127–132]). Těmto typům rozdělení odpovídají funkce intenzit poruchy, které uvádíme v následujícím přehledu.



Obr. 1.3: Vanová křivka intenzit poruch  $\lambda(x)$  dle konceptu vztahu (1.1)

- Exponenciální rozdělení (zajímavostí s využitím [3, s. 13] a (1.1) je, že):

$$\lambda(x) = \lambda, \quad x \geq 0. \quad (1.5)$$

- Gama rozdělení (pro všechny hodnoty parametru  $p$  funkce intenzity konverguje k 1, pro hodnotu  $p = 1$  přechází na exponenciální tvar):

$$\lambda(x) = \frac{x^{p-1}e^{-x}}{\Gamma(p) - \Gamma_x^*(p)}, \quad x \geq 0, p > 0, \quad (1.6)$$

kde  $\Gamma_x^* = \int_0^x x^{p-1}e^{-x} dx$  je částečná gama funkce.

- Weibullovo rozdělení (je pomocí takového průběhu intenzity možné popisovat degradaci objektu a pro  $p = 1$  přechází na exponenciální tvar):

$$\lambda(x) = p x^{(p-1)}, \quad x \geq 0, p > 0. \quad (1.7)$$

- Inverzní Gaussovo rozdělení:

$$\lambda(x) = \frac{\left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right]}{\Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right] - \exp\left(\frac{2\lambda}{\mu}\right) \Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{\lambda}{x} + 1\right)\right]}, \quad x \geq 0. \quad (1.8)$$

- Gumbelovo rozdělení minimálních extrémních hodnot:

$$\lambda(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

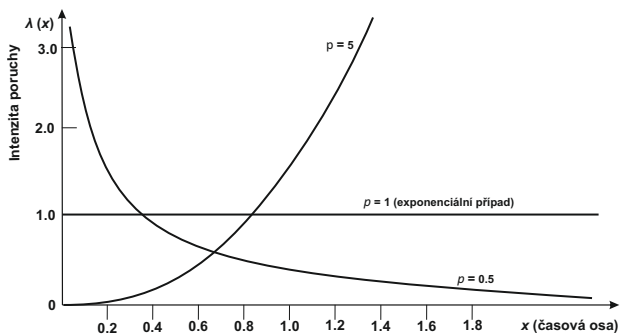
Gumbelovo rozdělení maximálních extrémních hodnot:

$$\lambda(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

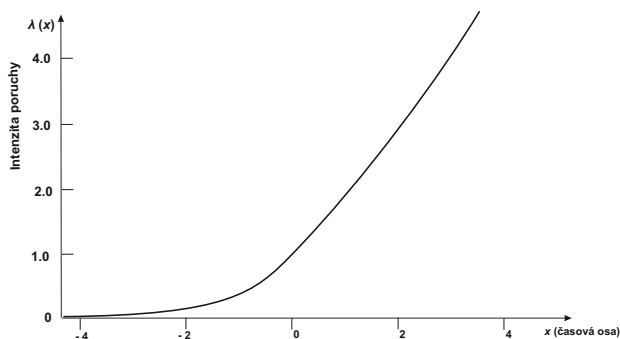
- Normální rozdělení:

$$\lambda(x) = \frac{\varphi(x)}{\Phi(-x)}. \quad (1.11)$$

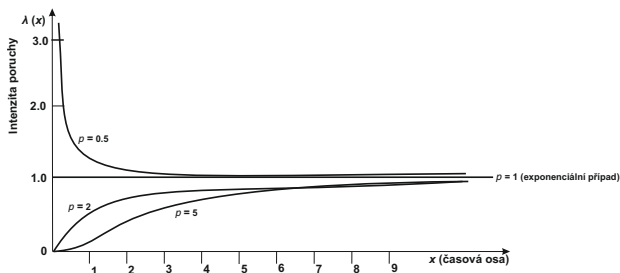
Příklady funkcí intenzit poruchy pro Weibullovo rozdělení z výrazu (1.7) s různými parametry  $p$ , pro Gumbelovo rozdělení extrémních hodnot z výrazu (1.9) a pro gama rozdělení z výrazu (1.6) s různými parametry  $p$  jsou uvedeny na obrázku 1.4, obrázku 1.5, resp. obrázku 1.6.



Obr. 1.4: Příklady funkcí intenzit poruch  $\lambda(x)$  pro různé hodnoty parametru  $p$  Weibullova rozdělení



Obr. 1.5: Příklad funkce intenzity poruchy  $\lambda(x)$  Gumbelova rozdělení minimálních extrémních hodnot



Obr. 1.6: Příklady funkcí intenzit poruch  $\lambda(x)$  pro některé hodnoty parametru  $p$  gama rozdělení

Odhady ukazatelů spolehlivosti je možné provádět i neparametricky. Nejčastěji využívaným neparametrickým odhadem funkce přežití je Kaplanův-Meierův odhad, pojmenovaný po Edwardu L. Kaplanovi a Paulu Meierovi (viz [44]). Tento odhad je založen na využití empirické distribuční funkce pro neúplná, a to zprava cenzorovaná data.

Nejjednodušší interpretace cenzorání je případ, kdy není známý přesný čas výskytu poruchy, ale jen to, že událost nastala či nenastala od posledního pozorování. Tento jev je nazýván cenzorováním zprava.

Nechť  $T$  je nezáporná náhodná veličina popisující čas selhání a  $C$  je nezáporná náhodná veličina popisující dobu pozorování. Pak náhodnou veličinu

$$X = \min(T, C), \quad X \geq 0$$

nazveme cenzorovaný čas selhání a

$$\delta = I(T \leq C)$$

nazveme indikátor selhání.

Nechť  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$  značí skutečně pozorované doby selhání získané z datového souboru rozsahu  $n$ . Tyto doby selhání definují  $k + 1$  intervalů

$$[0, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_k, \infty).$$

Označme symbolem  $d_j$  počet případů, kdy došlo k selhání v čase  $t_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ), symbolem  $m_j$  počet pozorování cenzorovaných v intervalu  $[t_j, t_{j+1})$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ) a symbolem  $n_j$  počet subjektů těsně před časem  $t_j$ , u kterých ještě selhání nenastalo, neboli počet těch subjektů, kteří před časem  $t_j$  jsou stále v riziku, tj.

$$n_j = (m_j + d_j) + \dots + (m_k + d_k).$$



Pak Kaplanův–Meierův neparametrický odhad funkce přežití je dán vztahem

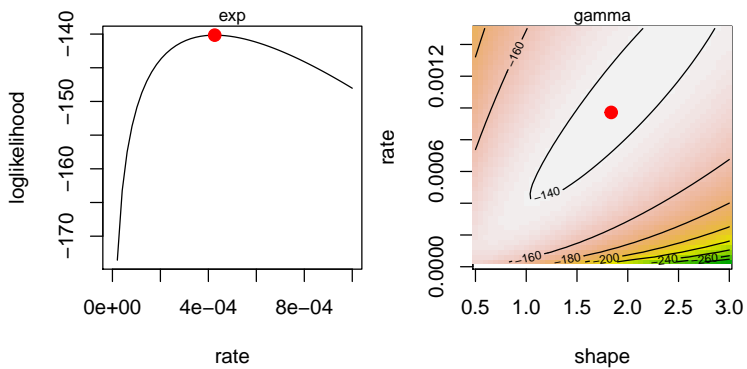
$$\widehat{S}_{KM}(t) = \prod_{i: t_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

Odhad rozptylu Kaplanova–Meierova odhadu funkce přežití je roven

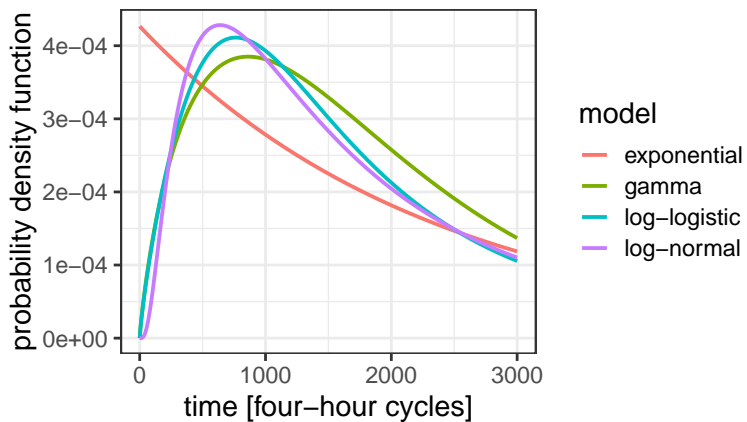
$$\widehat{\text{Var}}[\widehat{S}_{KM}(t)] = [\widehat{S}_{KM}(t)]^2 \widehat{\sigma}_S^2(t) = [\widehat{S}_{KM}(t)]^2 \sum_{i: t_i \leq t} \frac{d_i}{n_i(n_i - d_i)}$$

a je známý též pod názvem Greenwoodova formule. Tento odhad slouží ke konstrukci příslušných intervalů spolehlivosti.

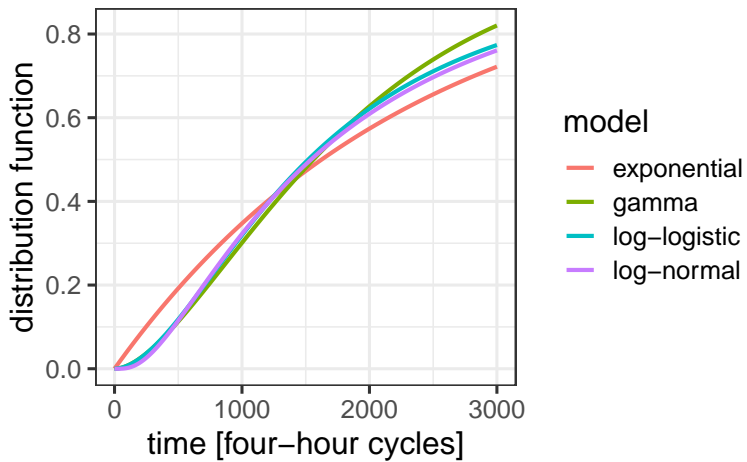
Ačkoliv jsou rozsáhlejší a ucelenější příklady praktických aplikací na konkrétních technických problémech dostupné v připojených člancích, pro ilustraci zde uvádím některé možnosti odhadu parametrů rozdělení pravděpodobnosti používaných ve spolehlivosti, viz obrázek 1.7 a také jejich průběhů, viz obrázek 1.8, společně s distribučními funkcemi, viz obrázek 1.9, funkcemi intenzit poruch, viz obrázek 1.10 a funkcemi přežití odhadnutými pro typická rozdělení parametricky i neparametrickým odhadem – Kaplanův–Meierův odhad, viz obrázek 1.11 a 1.12. Zdrojová data, na kterých byly tyto odhady provedeny jsou v souladu s článkem [92].



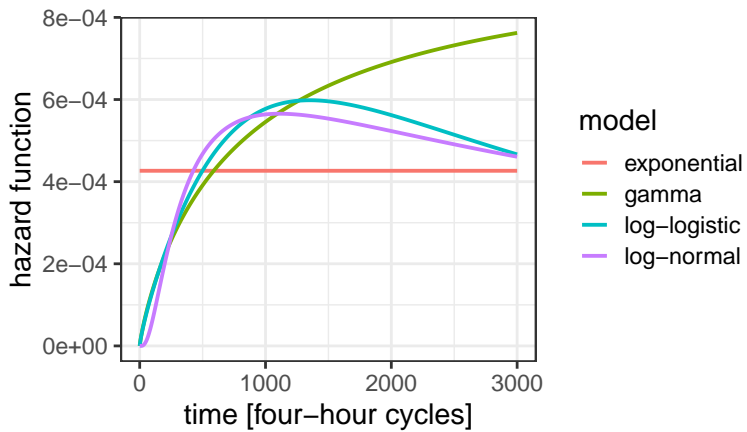
Obr. 1.7: Příklady odhadů parametrů rozdělení pomocí logaritmickej funkce věrohodnosti



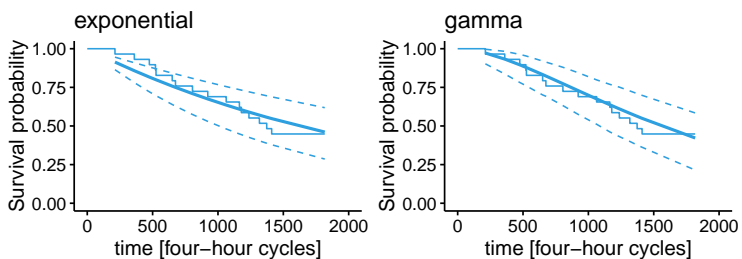
Obr. 1.8: Příklady odhadů hustot pravděpodobností



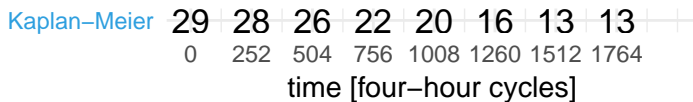
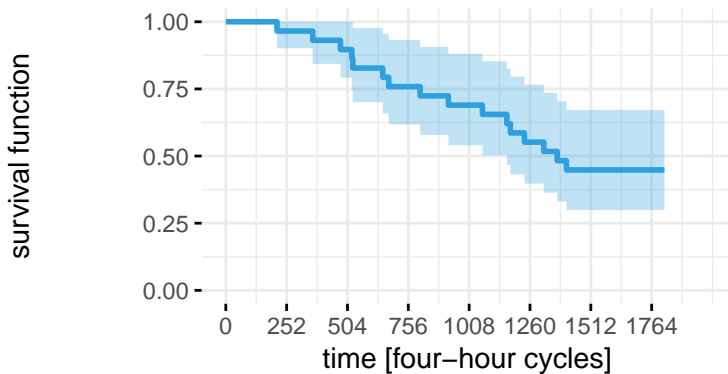
Obr. 1.9: Příklady odhadů distribučních funkcí



Obr. 1.10: Příklady odhadů funkcí intenzit poruchy



Obr. 1.11 : Příklady odhadů funkcí přežití parametrickým způsobem



Obr. 1.12: Příklady odhadu funkce přežití neparametrickým způsobem Kaplanův-Meierův odhad

## Kapitola 2

# Praktická realizace navrhovaných modelů pro studium degradace

V této části jsou stručně popsány publikované články, kterými autor demonstruje využitelnost výše navrhovaných přístupů pro studium degradace a dosažení kritické meze. Tyto články nejenom že reprezentují praktickou využitelnost navrhovaných postupů, ale rovněž podporují klíčovou myšlenku, jež tvoří cíl této práce, ve smyslu navržení perspektivních nástrojů a modelů pro studium a posuzování degradace v rámci mechaniky technických systémů.

Jak již bylo výše uvedeno, prezentované, navrhované a perspektivní modely jsou tzv. datově orientované. To znamená, že na reálná data se snaží pohlížet z perspektivy hledání vhodného matematického modelu, který by proces, vývoj a meze degradace, vznik mezního stavu a příchod poruch co nejlépe popisoval. Pokud to bylo s ohledem na důvěrnost informací možné, je v každém článku uveden alespoň malý příklad skutečně analyzovaných dat.

Články jsou záměrně seřazeny tak, že postupně naplňují předchozí pasáže práce v posloupnosti, jak je strukturována. Čili od klasických – parametrických odhadů, přes neparametrické, ukazatelů spolehlivosti, přes degradační procesy a modely jak s diskretním, tak se spojitým časem – včetně různých podob odhadu parametrů pro tyto modely, až po speciální soft metody z oblasti fuzzy logiky

a neuronových sítí.

Prvním článkem [92] autoři představují několik přístupů pro studium bezporuchovosti a posuzování degradace technického objektu. Jedná se o platinový termosnímač Pt-100, který nachází uplatnění v mnoha technických aplikacích. Na autory se přímo obrátil přední světový výrobce velmi kvalitních snímačů Pt-100 s požadavkem stanovení základních ukazatelů spolehlivosti. V tomto článku jsou prezentovány výsledky poměrně dlouhé zrychlené životnostní zkoušky Pt-100. Zrychlená zkouška měla formát  $(n, N, t)$ , což znamená, že do zkoušky bylo vloženo  $n$  zkoušených objektů, po vzniku poruše na nich nebyly ani opravovány ani nahrazovány ( $N$ ) a zkouška byla ukončena po stanoveném čase ( $t$ ). Formát zkoušky vypadal tak, že zkouška probíhala v mezních hodnotách provozního rozsahu Pt-100 od  $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$  do  $+180\text{ }^{\circ}\text{C}$  a trvala více než 10 měsíců. Data o provozu Pt-100 byla zaznamenávána po celou dobu zkoušky v intervalech 120 [s]. Záměrem bylo odhadnout ukazatele bezporuchovosti Pt-100, vyhodnotit průběh degradace a případně odhadnout očekávané provozní charakteristiky Pt-100.

Základní zpracování provozních dat vyžadovalo vyfiltrování chybějících údajů v těch případech, kdy u Pt-100 docházelo vlivem postupné degradace k výpadkům. Dále byla data zpracovávána klasickým parametrickým způsobem za účelem odhadu základních ukazatelů bezporuchovosti jako jsou například rozdělení hustoty pravděpodobnosti, distribuční funkce nebo funkce intenzity poruchy včetně bodových a intervalové odhadů pravděpodobnosti poruchy, střední doby do poruchy, atd. Tyto výsledky byly za pomoci testů dobré shody, resp. odhadu maximální věrohodnosti a kritérií AIC (Akaike Information Criterion) and BIC (Bayesian Information Criterion) srovnány s typickými parametrickými rozděleními, jež jsou ve spolehlivosti používána a popsána v kapitole 1.

V tomto případě je ovšem nutné si povšimnout, že výpočet odhadu funkce přežití však byl proveden neparametrickým přístupem tak, jak je uvedeno v kapitole 1. Tyto přístupy mají díky své přednosti stran ne nutného stanovení předpokládaných parametrů odhadovaného rozdělení, možnost pracovat s takto ne příliš příznivou podobou reálných-experimentálních dat. Díky svým přednostem nacházejí postupně neparametrické nástroje odhadů ukazatelů spolehlivosti stále více uplatnění v praxi. Dostávají se příkladně i do mezinárodních norem, které problematiku spolehlivosti pokrývají. O tuto skutečnost, a sice uplatňování nových a perspektivních přístupů v oblasti posuzování spolehlivosti v mezinárodní normalizaci, se zasazuje i autor této práce.

Druhý článek [93] představuje možnosti pro studium degradace a vzniku tzv. soft poruchy u superkapacitorů. Superkapacity jsou velmi perspektivní objekty pro akumulaci elektrické energie, které mají mnohé přednosti a jejich reálné technické aplikace se postupně rozšiřují. Analyzovaná data použitá v tomto přístupu

mají původ ve zrychlené zkoušce bezporuchovosti uvedeného objektu. Zkouška byla opět prováděna autory a měla dlouhodobější, několikaměsíční, trvání. Možnosti autorů stran počtu zařazených objektů do zkoušky a doby vyčleněné pro zkoušku však byly i přesto velmi omezené. Nicméně zaznamenaná data představovala dostatečný potenciál pro uplatnění některých typů navržených matematických modelů pro studium degradace. Superkapacitory byly s ohledem na jejich předpokládané použití zkoušeny v prostředí o teplotách  $-42\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $+25\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $+40\text{ }^{\circ}\text{C}$  s vlivy úrovní nabíjecích a vybíjecích proudů 2 A, 4 A, 6 A a 8 A.

Představené přístupy v této publikaci jsou založeny na modelování degradace a doby prvního dosažení – vznik soft poruchy. Pro modelování změn funkčních charakteristik superkapacitoru (především snižování kapacity v čase, dále časové změny v nabíjení a vybíjení) byly využity přístupy jak lineárního regresního modelu, tak difuzního procesu Wienerova typu s driftem. Základní lineární model byl využit jak ke obecnému odhadu rozdělení hustoty pravděpodobnosti doby prvního dosažení kritického prahu – a to pomocí využití jednotlivých kvantilů konfidenčních intervalů kolem střední hodnoty, tak ke stanovení parametrů difuzního procesu. Pro rozdělení pravděpodobnosti doby prvního dosažení jsou využity jak parametrické, tak neparametrické odhady - ve druhém případě jádrové vyhlazování. Pro stanovení míry shody odhadované hustoty pravděpodobnosti doby prvního dosažení a standardních parametrických rozdělení byla v tomto případě využita Kullbackova–Leibnerova divergence.

Na základě v tomto článku dosažených výsledků je možné sledovat a optimalizovat provoz těchto druhů technických objektů nejenom v obecných aplikacích, ale rovněž v těch, které jsou významně zatíženy bezpečnostním rizikem. To je užitečné především tam, kde se předpokládá, že superkapacitory budou plnit určitou formu zálohy pro rychlé akumulování nebo vydávání energie. Příkladem takových systémů mohou být dopravní, bezpečnostní nebo zdravotní systémy.

Ve třetím článku [94] autoři představují více forem z navrhovaných nových přístupů pro posuzování nepřímých diagnostických ukazatelů. Jedná se o provozní data sledovaného objektu, jejichž záznamy jsou delší než 15 let. Diagnostickým vektorem je v tomto případě tribodiagnostická informace z olejových dat. Diagnostický vektor má více než 30 položek. Prvotní průzkumová analýza dat zahrnuje rozdělení dat z diagnostického vektoru do tří základních skupin, které reprezentují oblasti vztažené ke sledovanému objektu. První z nich je oblast opotřebení, druhou oblastí je fyzikálně-chemická kvalita oleje a třetí je prostředí – jak vnější, tak provozní. Každá z těchto oblastí je v oleji reprezentována určitými specifickými prvky, které jsou pro nás závislými veličinami, jež jsou vždy závislé na veličinách nezávislých a sice provozní, resp. astronomická doba v určité podobě. Autoři proto zvolili dva přístupy a to analýzu hlavních komponent a faktorovou analýzu

k tomu, aby z každé uvedené skupiny vybrali nejvýznamnějšího zástupce, který ji reprezentuje. Dalším krokem byla segmentace dat na úseky, které reprezentují provozní období mezi výměnami oleje. Za dobu sledování populace objektů byly jednotlivé objekty provozovány nerovnoměrně a rovněž výměny olejů byly prováděny nerovnoměrně. Nicméně se podařilo díky segmentaci sesouladit počátek provozu každého objektu na novou olejovou náplň.

Část matematického modelování průběhu degradace, která je reprezentována v podobě vzrůstajícího nebo naopak klesajícího trendu koncentrací jednotlivých olejových částic, je zaměřena na využití zobecněných aditivních modelů, které slouží k funkcionálnímu popisu trendu v datech. Jsou velmi vhodné tam, kde data jsou tzv. řídká a tudíž mají nekompletní strukturu. Střední hodnota – trend, stanovený pomocí tohoto funkcionálního přístupu, byl použit jako jeden z parametrů do dále aplikovaných difuzních modelů typu Ornstein–Uhlenbeck. Difuzní konstanta byla odhadnuta pomocí metody *Restricted Maximum Likelihood Estimation* – REML. Cílem tedy bylo pomocí trajektorií navrženého difuzního modelu simulovat vývoj degradace charakterizovaný změnami koncentrací zmíněných olejových částic a to až do okamžiku dosažení jejich kritických koncentrací. Tento moment nazýváme jako doba prvního dosažení *First Hitting Time* (FHT). Při opakování simulací ve vysokém počtu vytvářených trajektorií získáváme množinu okamžiků, kdy trajektorie protne kritickou mez. Z této množiny sestavujeme histogram rozdělení dob prvního dosažení a pro něj poté hledáme jak parametrickými, tak neparаметrickými přístupy vhodná rozdělení hustoty pravděpodobnosti doby prvního dosažení. Na základě statistik rozdělení poté odhadujeme a predikujeme okamžik výskytu soft, resp. hard, poruchy. Jsou odhadovány rovněž další funkce pro FHT jako například distribuční funkce a funkce přežití pro předpokládané kritické meze koncentrací částic v oleji.

Čtvrtý článek [95] přináší výsledky studia zhoršování stavu a degradace funkce baterie typu Li-ION. Tyto akumulátory energie jsou pro svou cenu i technické parametry v současnosti velmi rozšířené. Příklady použití mohou být mobilní telefony, power banky, akumulátory u téměř většiny notebooků, tabletů, čteček, apod. Také zde autoři pracují s reálnými daty, která byla získána během zrychlené zkoušky bezporuchovosti uvedeného akumulátoru. Zrychlená klimatická zkouška probíhala v mezních oblastech předpokládaného typického provozu akumulátoru a sice  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $+10\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $+25\text{ }^{\circ}\text{C}$  s vlivy úrovní typických nabíjecích a vybíjecích proudů 1 A a 2 A. Rovněž v tomto případě měli autoři omezený prostor stran vložení počtu studovaných objektů do zkoušky a stran doby na zkoušku. Nicméně získaná data umožňují kvalitativně solidní zpracování a interpretaci výsledků.

V tomto případě autoři předpokládají dvoustavový model chování a fungování zmiňované Li-ION baterie v opakovaných cyklech až do okamžiku dosažení mez-



ního funkčního stavu akumulátoru, kdy dochází k jeho skokové degradaci. Pokles kapacity akumulátoru byl nejprve modelován pomocí nelineární funkce a parametry této funkce byly následně využity jako vstup do difuzního modelu pro parametr  $\mu_t$ , přičemž difuzní konstanta  $\sigma$  byla odhadnuta pomocí Stone-Weierstrassovy věty. Následně bylo chování akumulátoru simulováno tak, že pomocí simulace bylo generováno velké množství trajektorií, které dosahovaly kritické meze. Okamžiky průniku trajektorií kritickou mezí byly zaznamenávány a později z nich byl sestaven histogram. Pro něj byly parametrickým a neparametrickým způsobem odhadovány hustoty pravděpodobnosti doby prvního dosažení společně se základními statistikami. Na základě těchto výsledků byl pro různé úrovně teplot a nabíjecích/vybíjecích proudů získána oblast tzv. největší hustoty pravděpodobnosti pro předpokládané chování – doby zaručované funkce uvedeného akumulátoru ve specifikovaných provozních podmínkách. Proto jsou dosažené výsledky velmi hodnotné, neboť od výrobce těchto zdrojů energie, ani při zakoupení přístroje, kde je uvedený typ akumulátoru aplikován, je velmi obtížné nějaké konkrétní hodnoty provozní degradace získat.

V pátém článku [96] autoři pracují s daty o poruchách distribuční soustavy vody v regionu, který zásobuje vodou více než pět milionů obyvatel. Jedná se o skutečná provozní data, která byla zaznamenána po dobu více než 17 let. V záznamech se nacházejí pouze informace o počtu poruch vzniklých na daném vodovodním systému v jednotlivém měsíci v roce. Nejsou však k dispozici žádné další podrobnosti ani o příčině poruchy, o jejím mechanismu, důsledku ani o obnově. Data, ačkoliv jsou opticky velmi početná, jsou vlastně dosti omezená. Nicméně i přes tyto skutečnosti autoři aplikují jak tradiční, tak nově vytvořené matematické nástroje pro analýzu funkce bezporuchovosti, pro studium průběhu degradace a navíc prognózu stavu do budoucna.

Pro odfiltrování vlivu rozdílnosti dnů v jednotlivých měsících jsou informace o poruchách přepočítány na vztažený ukazatel ROCOF (Rate of Occurrence of Failure), se kterým pracujeme dál. A navíc jsme chtěli minimalizovat chyb v datech tím, že pracujeme s jednotlivými kvartály. Pro ROCOF je pomocí neparametrických nástrojů (funkce loess a kubický splajn) odhadnut trend, korelace v datech a případný vliv sezónnosti. V dalším kroku jsou pro studium a popis ROCOF aplikovány známé a standardní zobecněné nástroje používané pro modelování časových řad – tzv. state space modely, tzv. dynamické lineární modely, jako jsou *Local Linear Model* (LLM), *Local Linear Trend* (LLT) nebo *Basic Structural Model* (BSM). Nicméně byly vytvořeny i modely nové, založené na tzv. *Generalised Dynamic Linear Models* (GDLM) gaussovského a poissonovského typu (GDLM-G) a (GDLM-P), kdy oba typy, zdánlivě rozdílných forem Kalmanova rekurzoru, je možné vyjádřit s pomocí tzv. *linkovací funkce*. Pomocí Kalmanova filtru, smoo-

theru a prediktoru byly modelovány zjevné změny ve vlastnostech ROCOF u studované distribuční sítě vody. Významný je fakt, že pro všechny zmíněné komponenty bylo možné sledovat vliv sezónnosti a to i v případě prediktoru. Navíc byly pro uvedenou distribuční soustavu pomocí mocninového zákona a log-lineárního modelu provedeny parametrické i neparametrické odhady funkcí hustot pravděpodobností poruchy. O to více je daný výsledek, s ohledem na potenciál predikce poruchy hodnotný, neboť ve vztahu k technickému systému posiluje jak studium a bodové i intervalové odhady ukazatelů bezporuchovosti u dané soustavy, tak možnosti předpovědí chování soustavy, plus rozšiřuje obecný potenciál pro krizové řízení a havarijní plánování v daném regionu.

Šestým článkem [97] autoři posouvají možnosti posuzování, modelování a studia degradace ještě kvalitativně dále. Tímto a následujícím článkem se totiž dostáváme do oblastí tzv. soft (matematických) metod. V případě této aplikace je využíván jeden segment z teorie fuzzy logiky, který se nazývá *Fuzzy Inference System* (FIS). Pro studium degradace technického systému jsou využita diagnostická data, přičemž se jedná o aktualizovaný diagnostický vektor z tribodiagnostických olejových dat.

Již v úvodu článku je zmíněno, že nezávislých veličin v tomto případě máme více. Kromě astronomického času [den] pracujeme ještě s časem provozním – motohodina [Mh]. Rovněž v zaznamenaném diagnostickém vektoru jsou informace vždy závislé na obou nezávislých veličinách. Přednost přístupu FIS spočívá ve skutečnosti, že díky tomu, že pracuje s jazykovými proměnnými, je s to akceptovat určitou vágnost, nejistotu a neurčitost v datech, která je vždy inherentně přítomna. Navíc je schopen početně i graficky pracovat s dvojrozměrnou závislostí, která je právě ve studovaných závislých veličinách přítomna.

V tomto případě aplikace FIS pracujeme s výše popsanými formami Takagi–Sugeno a Mamdani, kterými jsou popisovány vstupní, ladicí a výstupní informace vztahené k analyzovaným datům. Výsledky viditelné na datech jasně ukazují v jakém způsobu nástroje FIS shlukují zaznamenaná data a jak je z těchto segmentů možné vytvořit celou plochu. Tato plocha je vlastně obrazem jedné studované veličiny (příkladně částice Fe, Pb. nebo saze), jejíž velikost koncentrace je závislá jak na kalendářním, tak provozním čase. Přístup FIS je výhodnější než například klasické parametrické dvojrozměrné regresní plochy, ačkoliv i těmi jsme se ve svých pracech zabývali, z toho důvodu, neboť výsledek, klidně i vizualizovaný ve formě FIS plochy více přiléhá skutečným naměřeným datům z provozu, jež jsou představována diagnostickým vektorem.

Finálně, jelikož máme k dispozici kritické hodnoty koncentrací pro jednotlivé studované částice, provádíme řezy vytvořenými FIS plochami v rovině kritické koncentrace. Tímto způsobem získáváme jakousi hranu rezu–konturu, která re-

prezentuje dosažení kritické koncentrace studované částice po určitém provozním [Mh] nebo kalendářním [den] čase. Díky tomuto výsledku je možné předpovídat vývoj degradace jak mazacího média, tak hlavně systému, ve kterém je umístěn. Což je právě velmi výhodné pro optimalizaci provozu, efektivnost údržby a racionalizaci nákladů životního cyklu.

V sedmém článku [98] je na aktualizovaných datech, podobných jako v předešlém případě, aplikován postup, který je další metodou tzv. soft přístupu, jež je založen na neuronových sítích (NN). Podobně jako v předchozím případě jsou NN sto snadněji pracovat s veličinami, které jsou zatíženy určitou jak mírou nejistoty, neurčitosti a vágnosti, tak poskytují potenciál pro studium určité veličiny závislé na dvou a více nezávislých veličinách. V tomto případě tedy opět aplikujeme na triodiagnostická olejová data, kdy jsou míry jednotlivých studovaných koncentrací závislé jak na kalendářním čase [den], tak na provozním čase [Mh].

Výsledky, podobně jako v předešlém případě, poskytují možnost dvojrozměrně studovat dosažení kritické hodnoty koncentrace určité olejové částice v závislosti na provozním [Mh] i kalendářním [den] čase. Pro praktické potřeby je takový přístup velmi hodnotný, neboť opět můžeme provádět odhady vzniku soft a později i hard poruchy.

# Závěr

Cílem práce je přinést přehled o nových, perspektivních a inspirativních přístupech, které lze v oblasti aplikované matematiky úspěšně využívat při posuzování spolehlivosti technických systémů. Jedná se především o možnosti odhadování a studia degradace, neboť zvyšující se kvalita u technických systémů přináší i obecně snižující se trend ve výskytu poruch. Klasické přístupy, tzv. tvrdé matematiky a to především teorie pravděpodobnosti a statistiky, jsou postupně doplňovány o přístupy novější – neparametrické, nebo tzv. měkké (soft) metody. Tyto přístupy mají své výhody, neboť je pomocí nich možné odhadovat jak ukazatele dílčích vlastností spolehlivosti, tak odhadovat stav studovaného systému.

Výsledky aplikací navrhovaných přístupů a modelů s využitím provozních dat ukazují, že doba dosažení soft-poruchy, která představuje počátek potenciálu vzniku hard-poruchy, je vhodným bodem pro posunutí počátku intervalu preventivní údržby. Konkrétní numerické výsledky jsou uvedeny v publikovaných článcích. Nicméně lze již nyní konstatovat, že v rámci modifikace by intervaly preventivní údržby, řízení provozu, vstupy pro krizové řízení a havarijní plánování mohly být prodlouženy minimálně o desítky procent a uspořeny by mohly být stovky tisíc ne-li miliony. Tato skutečnost se praxi významně projevuje v

- nákladech životního cyklu a speciálně nákladech na provoz a údržbu techniky,
- optimalizaci provozu techniky,
- přípravě personálu – obsluhy, technického personálu podpory i managementu,
- plánování a odhadech splnění zadání (mission).

# Literatura

- [1] Abramowitz M. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications Inc., 1965.
- [2] Aggarwal Ch. C. *Neural Networks and Deep Learning: A Textbook*. Cham: Springer, 2018.
- [3] Anděl J. *Základy matematické statistiky*. Praha: Matfyzpress, 2011.
- [4] Aven T. and Jensen U. *Stochastic Models in Reliability*. New York: Springer, 1999.
- [5] Allen J. S. L. *An Introduction to Stochastic Processes with Application to Biology*. New York: Taylor&Francis Group, 2011.
- [6] Bibbona E., Panfilo G. and Tavella P. The Ornstein–Uhlenbeck process as a model of a low pass filtered white noise. *Metrologia*, 2008, Vol. 45, p.117–126. doi:10.1088/0026-1394/45/6/S17.
- [7] Birnbaum Z. W. and Saunders S. C. A new family of life distributions, *Journal of Applied Probability*, Vol. 6, p. 319–327.
- [8] Billingsley P. *Probability and Measure*. New York: Willey, 1995.
- [9] Bohner M. and Peterson A. *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*. Boston: Birkhäuser, 2001.
- [10] Bohner M. and Sanyal S. The Stochastic Dynamic Exponential and Geometric Brownian Motion on Isolated Time Scale. *Community Mathematical Anals*, 2010, Vol. 8, p. 120–135.

- [11] Bogdanoff J. L. and Kozin F. *Probabilistic Models of Cumulative Damage*. New York: Wiley, 1985.
- [12] Bogdonavičius V. and Nikulin M. Estimation in degradation models with explanatory variables. *Lifetime Data Analysis*, Vol. 7, p. 85–103, 2001.
- [13] Coffey W. T. and Kalmykov Y. P. and Waldron J. T. The Langevin Equation, With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering (Second Edition). *World Scientific Series in Contemporary Chemical Physics*, Vol 14.
- [14] Couallier V. *Some recent results on joint degradation and failure time modelling*, in Probability, Statistics and Modelling in Public Health, M. Nikulin, D. Commendes and C. Huber, eds. Springer Science + Business Media, p. 73–89, 2006.
- [15] Cox D. R. *Renewal Theory*, London: Egmont UK Ltd, 1962.
- [16] Csörgő M. Random Walk and Brownian Local Times in Wiener Sheets. *Periodica Mathematica Hungarica*, 2010, Vol. 61, p. 1–21.
- [17] Desmond A. F. and Chapman G. R. Modelling Task Completion Data with Inverse Gaussian Mixtures. *Applied Statistics*, 1993, Vol. 42, No. 4, p. 603–613.
- [18] Ditlevsen S. and Ditlevsen O. Parameter estimation from observations of first-passage times of the Ornstein–Uhlenbeck process and the Feller process. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2008, Vol. 23, p. 170–179.
- [19] Doksum K. A. and Høyland A. Models for Variable-Stress Accelerated Life Testing Experiments Based on Wiener Processes and the Inverse Gaussian Distribution. *Technometrics*, 1992, Vol. 34, No. 1, p. 74–82.
- [20] Doksum K. A. and Normand S. L. T. Gaussian models for degradation processes – part I: methods for the analysis of biomarker data. *Lifetime Data Analysis*, 1995, Vol. 1, p. 131–144.
- [21] Doob J. L. The Brownian movement and stochastic equations. *Annals of Mathematics*, 1942, Vol. 43, p. 351–369.
- [22] Efromovich S. *Nonparametric curve estimation: Methods, theory, and applications*. Springer, New York, 2008. ISBN 9780387226385.

- [23] Durbin, J. and Koopman, S. J. *Time Series Analysis by State Space Methods* (2nd ed.). Oxford: Oxford University Press, 2012.
- [24] Einstein A. *Investigation of the Theory of Brownian Movement*, Dover, 1956.
- [25] Fan J. and Gijbels I. *Local Polynomial Modelling and its Applications*. London: Taylor & Francis Ltd, 1996.
- [26] Grow D. and Sanyal S. Brownian Motion Indexed by a Time Scale. *Stochastic Analysis and Applications*, 2011, Vol. 29, p. 457–472. ISSN 0736-2994.
- [27] Guang J., Matthews D. E. and Zhou Z., A Bayesian framework for on-line degradation assessment and residual life prediction of secondary batteries in spacecraft. *Reliability Engineering and System Safety*, 2013, Vol. 113, p. 7–20. ISSN 0951-8320.
- [28] Guo Ch., Wang W., Guo B. and Si X. A maintenance optimization model for mission-oriented systems based on Weiner degradation. *Reliability Engineering and System Safety*, 2013, Vol. 111, p. 183–194. ISSN 0951-8320.
- [29] Györfi L., Härdle W., Sarda P. and Vieu P. *Nonparametric curve estimation from time series*. Springer, Berlin, 2013. ISBN 3540971742.
- [30] Härdle W. *Applied nonparametric regression*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [31] Harvey, A. C. *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1989.
- [32] Hilger S. *Ein Masskettenkalkul mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*. Würzburg: Universität Würzburg, 1998.
- [33] Horová I., Koláček J. and Zelinka J. *Kernel smoothing in Matlab: Theory and practice of kernel smoothing*. World Scientific, Singapore, 2012. ISBN 978-981-4405-48-5.
- [34] Horová I. Teorie a praxe jádrového vyhlazování. In J. Holčík and M. Komenča, editors, *Matematická biologie: e-learningová učebnice [on-line]*, pages 1–73. Masarykova univerzita, Brno, 2015. ISBN 978-80-210-8095-9.
- [35] Horová I., Koláček J. and Zelinka J. Kernel smoothing toolbox. on-line, 2012. cit. 2018-04-20.

- [36] Hurvich C. M., Simonoff J. S. and Tsai C.-L. Smoothing parameter selection in nonparametric regression using an improved Akaike information criterion. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)*, 1998, 60: p. 271–293.
- [37] Hyndman, R. J., Koehler, A. B., Ord, J. K. and Snyder, R. D. *Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach*. Berlin Germany: Springer, 2008.
- [38] Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F. A. and Sanders A. B. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance*, 1992, Vol. 52, p. 1209–1227.
- [39] Chhikara R. S. and Folks J. L. The Inverse Gaussian Distribution as a Life-time Model. *Technometrics*, 1977, Vol. 19, No. 4, p. 461–468.
- [40] IEC 60050-192 – International Electrotechnic Vocabulary, Chapter 191 – Quality and Dependability of Services, 2014.
- [41] IEC 60300-1, ed. 3.0, Management spolehlivosti – Část 1: Návod pro management a použití.
- [42] Kahle W. and Wendt, H. *Statistical Analysis of Damage Processes, Recent Advances in Reliability Theory: Methodology, Practice and Inference*. Boston: Birkhäuser, 2000.
- [43] Kahle W. and Wendt, H. *Statistical analysis of some parametric degradation models, in Probability, Statistics and Modelling in Public Health*, M. Nikulin, D. Commendes and C. Huber, eds. Springer Science + Business Media, p. 266–279, 2006.
- [44] Kaplan E. L. and Meier P. Nonparametric estimation from incomplete observations. *Journal of the American Statistical Association*, 1958, 53(282): p. 457–481.
- [45] Kokoszka P. and Reimherr M. *Introduction to Functional Data Analysis*. Portland: Taylor & Francis Inc, 2017.
- [46] Kokoszka P. and Reimherr M. *Introduction to functional data analysis*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2017. ISBN 9781498746694.
- [47] Kolářček J. Plug-in method for nonparametric regression. *Computational Statistics*, 23: p. 63–78, 2008.



- [48] Koláček J. and Horová I. Iterative bandwidth method for kernel regression. *Journal of Statistics: Advances in Theory and Application*, 8: p. 91–103, 2012.
- [49] Kolářová E. *Stochastické diferenciální rovnice v elektrotechnice*. Disertační práce, 2005. Brno: VUT.
- [50] Kolářová E. *The Brownian Bridge Process*. In XXVII International Colloquium, Brno, 2009.
- [51] Kulczycki P. *Estymatory jądrowe w analizie systemowej*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2005. ISBN 83-204-3147-6.
- [52] Lefebvre M. and Perotto S. A semi-Markov Process with Inverse Gaussian Distribution as Sojourn Time. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, Vol. 35, p. 4603–4610. ISSN: 0307-904X.
- [53] Liang Z. and Yuen K. Ch. and Guo J. Optimal Proportional Reinsurance and Investment in Stock Market with Ornstein–Uhlenbeck Process. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2011, Vol. 49, p. 207–215. ISSN: 0167-6687.
- [54] Likeš J. a Machek J. *Počít pravděpodobnosti*, Praha: SNTL, 1981.
- [55] Linden M. Modelling Strike Duration Distribution: a Controlled Wiener Process Approach. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2000, Vol. 16, p. 35–45.
- [56] Mandl P. *Stochastické integrály a jejich aplikace*, Praha: Academia, 1976.
- [57] Mandl P. *Pravděpodobnostní dynamické modely*, Praha: Academia, 1985.
- [58] Mann R. N., Schafer R. E. and Singpurwalla N. D. *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. New York: John Wiley & Sons, 1974.
- [59] Meeker W. Q. and Escobar L. A. *Statistical Methods for Reliability Data*. Chichester: John Wiley and Son, 1998.
- [60] Merritt D. and Berczik P. and Laun F. Brownian motion of black holes in dense nuclei. *The Astronomical Journal*, 2007, Vol. 133, No. 2, p. 553–563, doi:10.1086/510294.
- [61] Mitsuo F. *Reliability and Degradation of Semiconductor Lasers and LED*. Norwood: Artech House, 1991.

- [62] Morillo I. and Bermúdez L. Bonus-malus system using an exponential loss function with an Inverse Gaussian distribution. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2003, Vol. 33, p. 49–57. ISSN 0167-6687.
- [63] Nikulin et al. *Advances in Degradation Modeling, Statistics for Industry and Technology*. Boston: Birkhäuser, 2010.
- [64] Novák V. *Základy fuzzy modelování*. Praha: BEN, 2000.
- [65] Novák V. *Fuzzy množiny a jejich aplikace*. Praha: SNTL, 1986.
- [66] Nortwijk, J.M. A survey of the application of gamma processes in maintenance. *Reliability Engineering and System Safety*, 2009, Vol. 94, p. 2–21.
- [67] Parzen E. On estimation of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics*, 33: p. 1065–1076, 1962.
- [68] Petris, G., Campagnoli, P. and Petrone, S. *Dynamic linear models with R*. New York: Springer, 2009.
- [69] Promislow D. and Young V. Minimizing the Probability of Ruin when Claims Follow Brownian Motion with Drift. *North America Actuarial Journal*, 2005, Vol. 9, p. 109–128.
- [70] Racine J. S. and Hayfield T. Package ‘np’. on-line, 2018. cit. 2019-11-22.
- [71] Ricciardi L. M. *Diffusion processes and Related Topics in Biology*. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
- [72] Rojas R, *Neural Networks: A Systematic Introduction*. Berlin: Springer, 1996.
- [73] Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics*, 27: p. 832–837, 1956.
- [74] Ruggeri F. and Kenett R. S. and Faltin F. W. *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability*. Chichester: Wiley, 2007.
- [75] Sanyal S. *Stochastic Dynamic Equations*. Rolla: Missouri University of Science and Technology, 2008.
- [76] Scott D. W. *Multivariate density estimation: Theory, practice, and visualization*. Wiley, New York, 2 edition, 2015. ISBN 9780471697558.

- [77] Sherif Y. S. and Smith M. L. First-Passage Time Distribution of Brownian Motion as a Reliability Model. *IEEE Transaction on Reliability*, 1980, Vol. R-29, No. 5., p. 425–426, ISSN 0018-9529.
- [78] Silverman B. W. *Density estimation for statistics and data analysis*. Chapman and Hall, London, 1986. ISBN 0-412-24620-1.
- [79] Simonoff J. S. *Smoothing methods in statistics*. Springer, New York, 1996. ISBN 0-387-94716-7.
- [80] Singpurwalla N. D. Survival in dynamic environments, *Statistical Science*, Vol. 10, p. 86–103, 1995.
- [81] Škráček J. a Tichý Z. *Základy aplikované matematiky III*, Praha: STNL, 1990.
- [82] Smith Ch. E. and Lánský P. A reliability application of a mixture of inverse Gaussian distributions. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 1994, Vol. 10, p. 61–69. ISSN 8755-0024.
- [83] Sobczyk K. and Spencer B. F. *Random Fatigue From Data to Theory*. London: Academic Press, 1992.
- [84] Tuckwell H. C. *Elementary Application of Probability Theory*. London: Champan & Hall, 1988. ISBN 0 412 57620 1.
- [85] Tukey J. W. Curves as parameters, and touch estimation. In *Proceedings of the 4th Symposium on Mathematics, Statistics and Probability*, p. 681–694. University of California Press, Berkley, 1961.
- [86] Vališ D., Žák L. and Pokora O. Engine residual technical life estimation based on tribo data. *Eksplatacja i Niezawodność–Maintenance and Reliability*, 2014, vol. 16, no. 2, p. 203–210. ISSN 1507-2711.
- [87] Vališ D., Žák L. and Pokora O. Contribution to system failure occurrence prediction and to system remaining useful life estimation based on oil field data. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, 2015, vol. 229, no. 1, p. 36–45. ISSN 1748-006X.
- [88] Vališ D., Žák L. and Pokora O. Failure prediction of diesel engine based on occurrence of selected wear particles in oil. *Engineering Failure Analysis*, 2014, vol. 56, no. 10/2015, p. 501–511. ISSN 1350-6307.

- [89] Vališ D., Žák L., Pokora O. System Condition Estimation Based on Selected Tribodiagnostic Data. *Quality and Reliability Engineering International*, 2015. ISSN 0748-8017.
- [90] Vališ D., Žák L., Pokora O. and Lánský P. Perspective analysis outcomes of selected tribodiagnostic data used as input for condition based maintenance. *Reliability Engineering and System Safety*, 2016, vol. 145, no. 1, p. 231–242. ISSN 0951-8320.
- [91] Vališ D. *Stochastické modely se spojitým časem a jejich aplikace (příspěvek k teorii degradace)*. Brno: Masarykova Univerzita 2016, 128 s.
- [92] Vališ D., Vintř Z., Forbelská M. and Leuchter J. Perspective on reliability assessment principles of platinum thermometer based on accelerated tests. *Microelectronics Reliability*, 2019, (9/2019). ISSN 0026-2714. IF 1.447
- [93] Vališ D., Nováček O., Hasilová K. and Leuchter J. Modelling of degradation and a soft failure moment during the operation of a supercapacitor applying selected diffusion processes. *Engineering Failure Analysis*, 2017, 82(04/2017), p. 566–582. ISSN 1350-6307. IF 1.676
- [94] Vališ D., Koláček J. and Pokora O. System failure estimation based on field data and semi-parametric modeling. *Engineering Failure Analysis*, 2019, 101(04/2019), p. 473–484. ISSN 1350-6307. IF 2.249
- [95] Hasilová K. and Vališ D. Non-parametric estimates of the first hitting time of Li-ion battery. *Measurement*, 2018, 113(Leden 2018), p. 82–91. ISSN 0263-2241. IF 2.218
- [96] Vališ D., Hasilová K., Forbelská M. and Vintř Z. Reliability modelling and analysis of water distribution network based on backpropagation recursive processes with real field data. *Measurement*, 2020, 149(Leden 2020). ISSN 0263-2241. IF 2.218
- [97] Vališ D., Žák L. and Vintř Z. Application of fuzzy inference system for analysis of oil field data to optimize combustion engine maintenance. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 2019. ISSN 09544070. IF 1.46
- [98] Vališ D., Gajewski J. and Žák L. Potential for using the ANN-FIS meta-model approach to assess levels of particulate contamination in oil used in mechanical systems. *Tribology International*, 2019, 135(March 2019), p. 324–334. ISSN 0301-679X. IF 3.44

- [99] Vopatová K. Kernel choice with respect to the bandwidth in kernel density estimates. *Acta Universitatis Matthiae Belii series Mathematica*, 18: p. 47–53, 2011.
- [100] Walker G. On Periodicity in Series of Related Terms. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1931, Ser. A, Vol. 131, p. 518–532.
- [101] Wand M. P. and Jones M. Ch. *Kernel smoothing*. London: Taylor & Francis Ltd, 2014.
- [102] Wand M. P. and Jones M. C. *Kernel smoothing*. Chapman and Hall, London, 1995. ISBN 0-412-55270-1.
- [103] Wang X. Wiener processes with random effects for degradation data. *Journal of Multivariate Analysis*, 2010, Vol. 101, p. 340–351.
- [104] Wang X., Balakrishnan N. and Guo B. Residual life estimation based on a generalized Wiener degradation process. *Reliability Engineering and System Safety*, 2014, Vol. 124, p. 13–23.
- [105] West, M. and Harrison, J. *Bayesian forecasting and dynamic models (Springer Series in Statistics)*. Springer-Verlag, 1997.
- [106] Whitmore G. A. and Schenkelberg F. Modelling accelerated degradation data using Wiener diffusion with a time scale transformation, *Lifetime Data Analysis*, Vol. 3, p. 27–45, 1997.
- [107] Whitmore G. A. Estimation degradation by a Wiener diffusion process subject to measurement error, *Lifetime Data Analysis*, 1995, Vol. 1, p. 307–319.
- [108] Wulfsohn M. and Tsiatis A. A joint model for survival and longitudinal data measured with error, *Biometrics*, 1997, Vol. 53, p. 330–339.
- [109] Yang Z. and Tsui A. K. Analytically Calibrated Box-Cox Percentile Limits for Duration and Event-Time Models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2004, Vol. 35, p. 649–677.
- [110] Yule G. U. On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1927, Ser. A, Vol. 226, p. 267–298.

[111] Zadeh L. A. *The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, parts 1,2, and 3*. New York: Academic Press, 1975.